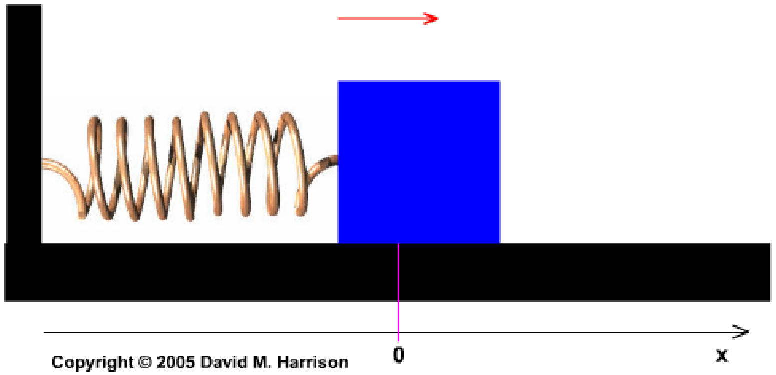
GERAK HARMONIK

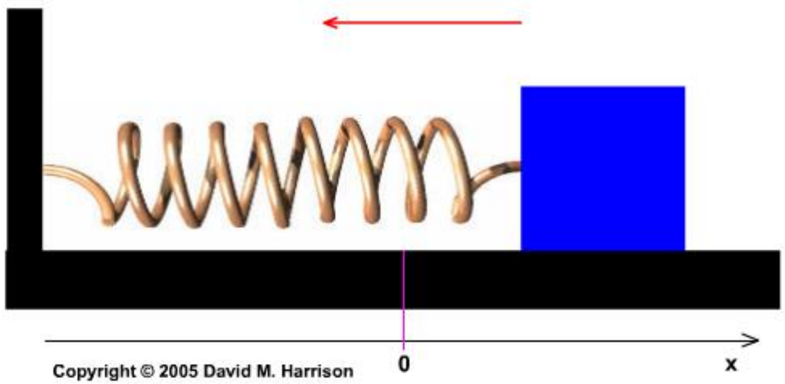
Pembahasan Persamaan Gerak

untuk Osilator Harmonik Sederhana

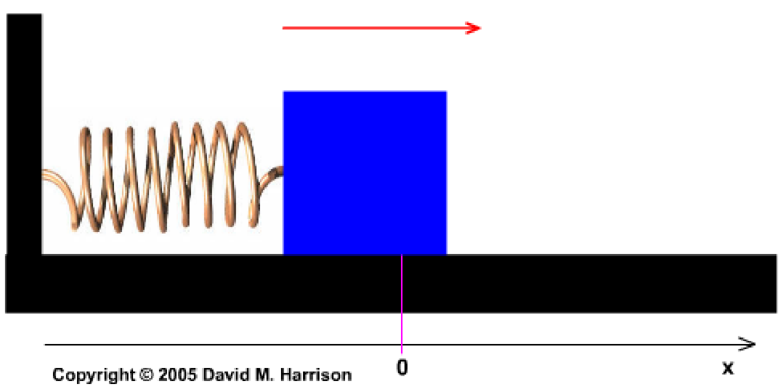
Ilustrasi



Pegas posisi setimbang, $F = 0$



Pegas teregang, $F = - k.x$



Pegas tertekan, $F = k.x$

Persamaan tsb mengandung turunan terhadap fungsi x, sehingga disebut persamaan diferensial.

Persamaan ini juga dijumpai pada : Getaran senar dan Ayunan. Begitu pula dalam listrik (arus bolak-balik) dimana sebagai ganti perpindahan x, digunakan V(t) (Potensial listrik) atau arus listrik I(t).

Gerak osilasi suatu gerak yang sangat penting untuk diketahui, karena berhubungan dengan getaran, misalnya : mesin, bumi, molekul dan atom di dalam bahan.

$$F = - k.x \quad \Rightarrow \quad F = m.g = m.a$$

Sehingga :

$m.a = - k.x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$ atau $a = \frac{dv}{dt}$, adalah percepatan

$m.a + k.x = 0$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.x = 0$$

$$m.\frac{d^2}{dt^2}x + k.x = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{k}{m}x$$

Catatan :

Dari kalkulus diferensial fungsi sinus atau cosinus memenuhi sifat, yaitu :

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = - \sin t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos t) = - \frac{d}{dt}(\sin t) = - \cos t$$

sehingga dapat ditulis :

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\frac{k}{m} x$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{k}{m} x(t)$$ dimana : $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{d^2}{dt^2} A \cos(\omega t + \delta)$$ $\Rightarrow$ dimana : A, ω dan δ adalah tetapan.

Persamaan diatas diturunkan dua kali, sehingga :

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{d^2}{dt^2} A \cos(\omega t + \delta) = -\frac{d}{dt} A \omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$= -A \omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

sedangkan :

$$\frac{k}{m}\ x(t) = \frac{k}{m}\ A\cos(\omega t + \delta)$$

sehingga persamaan menjadi :

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) = -\frac{k}{m}\ x(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\ x(t) + \frac{k}{m}\ x(t) = 0$$

$$-A\,\omega^2\cos(\omega t + \delta) + \frac{k}{m}\ A\cos(\omega t + \delta) = 0$$

$$A\,\omega^2\cos(\omega t + \delta) = A\ \frac{k}{m}\ \cos(\omega t + \delta)$$

Dari persamaan diatas terlihat bahwa :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{atau} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

dimana : ω = frekuensi sudut = $2\pi f$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T}; \qquad T = \frac{1}{f}$$

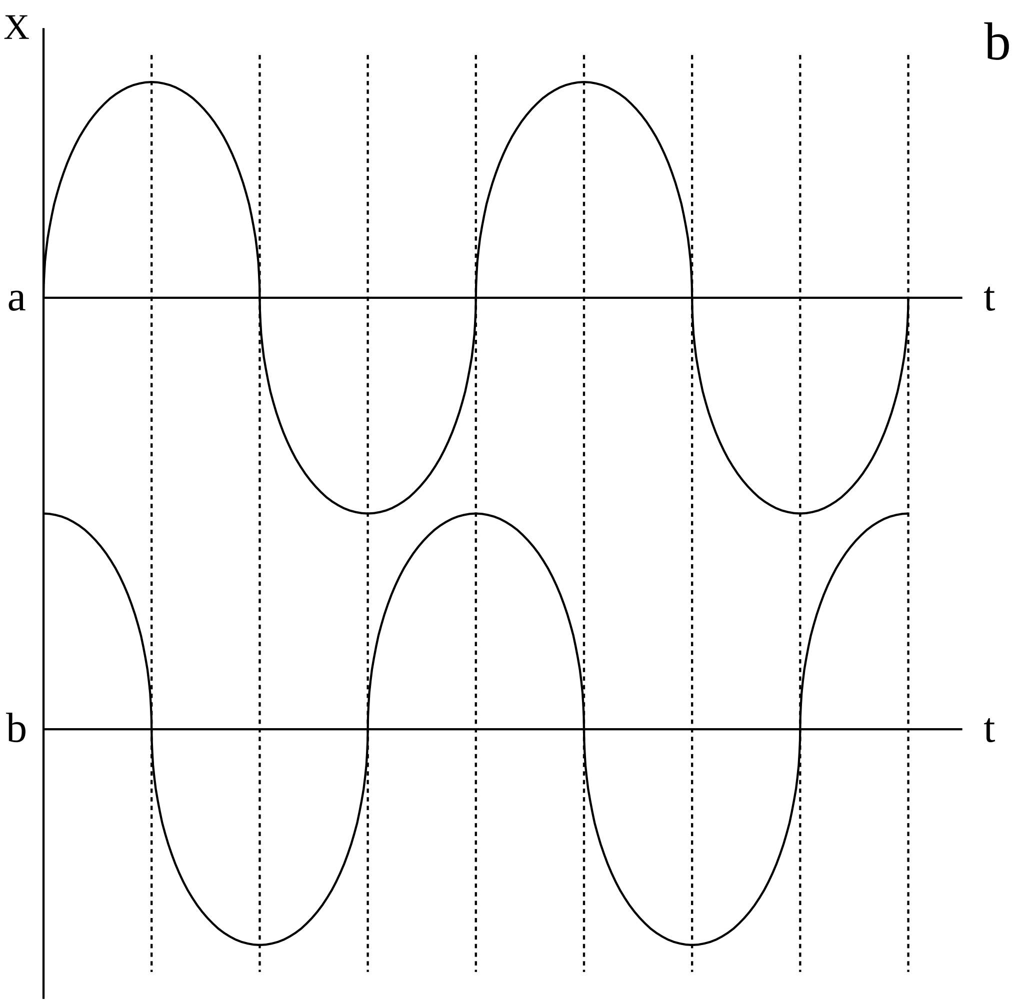
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$(\omega t + \delta)$ = fasa dari gerakan harmonik

δ = tetapan fasa

Dalam hal ini dua gerakan mungkin mempunyai amplitudo dan perioda yang sama akan tetapi dengan fasa yang berbeda.

Misalkan : $\delta = \dfrac{\pi}{2} = 90^o$



a. $x = A \sin \omega t \Rightarrow x = 0$ pada $t = 0$

b. $x = A \cos \omega t \Rightarrow x = \max$ pada $t = 0$

maka untuk

Kecepatan :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega \sin \omega t$$

Percepatan :

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega^2 \cos \omega t$$

Sebuah benda bermassa 500 gr dipasang pada pegas dan digetarkan. Getaran terjadi sepanjang sumbu x, persamaan diberikan adalah :

$x(t) = 100 + 10 \cos (5\pi\, t + 60^o) \Rightarrow$ x posisi benda dalam (cm)

Nilai t (waktu) pada saat posisi setimbang

Posisi pegas bila ada dalam posisi setimbang, persamaannya adalah :

$$\Delta x = 10 \cos (5\pi\, t + 60^o)$$

Pegas dalam keadaan setimbang bila : $\Delta x = 0$

Artinya : posisi setimbang ini dicapai pada saat $\Delta x = 10 \cos (5\pi\, t + 60^o) = 0$

Maka nilai t pada posisi setimbang :

$5\pi\, t + 60^o = 90^o + n(360^o) \Rightarrow$ n = bilangan bulat

$5\pi\, t = 90^o - 60^o + n(360^o)$

$= 30^o + n(360^o)$

$$t = \frac{30^\circ + n(360^\circ)}{5\pi}$$

$$360 = 2\pi$$
$$180 = \pi$$
$$90 = \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{30^\circ + n(360^\circ)}{5\pi}$$

$$= \frac{\pi/6}{5\pi} + n\,\frac{2\pi}{5\pi} = \frac{\pi}{30\pi} + n\,\frac{2\pi}{5\pi} = \left(\frac{1}{30} + n\frac{2}{5}\right) \text{detik}$$

jika n = 0, 1, 2

$$t = \frac{1}{30} + (0)\frac{2}{5} = \frac{1}{30} \text{ detik}$$

$$t = \frac{1}{30} + (1)\frac{2}{5} = \frac{13}{30} \text{ detik}$$

$$t = \frac{1}{30} + (2)\frac{2}{5} = \frac{25}{30} \text{ detik}$$

Jadi posisi setimbang terjadi pada saat :

$$t = \frac{1}{30}, \frac{13}{30}, \frac{25}{30}, \ldots \text{ Detik}$$

Menentukan Perioda Getaran

Perlu diingat persamaan umum gerak harmonik adalah :

$$\Delta x = A \cos(\omega t + \phi_o)$$

dimana : A = Amplitudo getaran

ϕ_o = Fasa awal

ω = Frekuensi sudut (rad/dt)

$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 5\pi$

$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{5\pi}{2\pi} = \dfrac{5}{2}$ Hz , artinya :

dalam 1 detik ada $\dfrac{5}{2}$ getaran

sehingga periodanya : $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{5/2} = \dfrac{2}{5}$ detik

Posisi awal

Posisi awal dapat ditentukan dengan mengambil t = 0 , sehingga :

$$x(t=0) = 100 + 10 \cos (5\pi t + 60^o)$$

$$= 100 + 10 \cos [5\pi (0) + 60^o]$$

$$= 100 + 10 \cos 60 = 100 + 10 (0,5) = 100 + 5 = 105 \text{ cm}$$

Kecepatan awal

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [100 + 10 \cos (5\pi t + 60^o)]$$ $\Rightarrow$ turunannya adalah :

$$= -10 (5\pi) \sin (5\pi t + 60^o)$$ $\Rightarrow$ pada saat t = 0 kecepatan benda adalah :

$$= -50\pi \sin (5\pi (0) + 60^o)$$

$$= -50\pi \sin 60^o$$

$$= -50\pi\ 0,86$$

$$= -135,96 \cong -136 \text{ cm/dt}$$

tanda (-) berarti benda sedang bergerak ke arah x negatif (ke kiri)

Tetapan pegas (k)

Dapat ditentukan, karena massa dan frekuensi diketahui, yaitu dengan hubungan :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad k = \omega^2\, m$$

$m = 500$ gr $= 0{,}5$ kg $\quad \Rightarrow \quad \omega = 5\pi$

$$k = \omega^2 m = (5\pi)^2\,(0{,}5\text{ kg})$$
$$= 25\,\pi^2\,(0{,}5\text{ kg})$$
$$= 12{,}5\,\pi^2\text{ kg/dt}^2$$
$$= 123{,}245\text{ N/m}$$

atau

$$k = (2\pi f)^2 \cdot m$$
$$= \left(2\pi\frac{5}{2}\right)^2 (0{,}5)$$
$$= 12{,}5\,\pi^2\text{ kg/dt}^2$$

Gaya tarik pegas

$F = + k.x \quad \Rightarrow \quad$ pada saat $t = 0$

$F(t=0) = + k\, \Delta x(t=0)$

$$\Delta x = 10 \cos (5\pi\, t + 60^o) \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

$$= 10 \cos (5\pi\, (0) + 60^o)$$

$$= 10 \cos 60^o$$

$$= 10 \,.\, 0{,}5$$

$$= 0{,}05 \text{ m}$$

Jadi

$$F(t=0) = + (12{,}5)\, \pi^2\, (0{,}05\text{m})$$

$$= + 6{,}16 \text{ N}$$

tanda (+) gaya adalah ke kanan

Percepatan

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\,[-50\pi \sin (5\pi\, t + 60^o)]$$

$$= -(50\pi)(5\pi)\cos(5\pi\, t + 60^o) \quad \Rightarrow \quad \text{pada saat} \quad t = 0$$

$$= -250\,\pi^2 \cos 60^o \quad = -250\,\pi^2\,(0{,}5)$$

$$= -125\,\pi^2\ \text{cm/dt}^2 \quad = -12{,}32\ \text{m/dt}^2$$

karena $m = 0{,}5$ kg gaya yang bekerja pada benda adalah :

$F = m\,a = (0{,}5\ \text{kg})(-12{,}32\ \text{m/dt}^2) = -6{,}16\ \text{N}$ (arah ke kiri)

Gaya pada pegas F ' adalah reaksi dari gaya F pada benda.

Dari hukum Newton III : $F' = F$

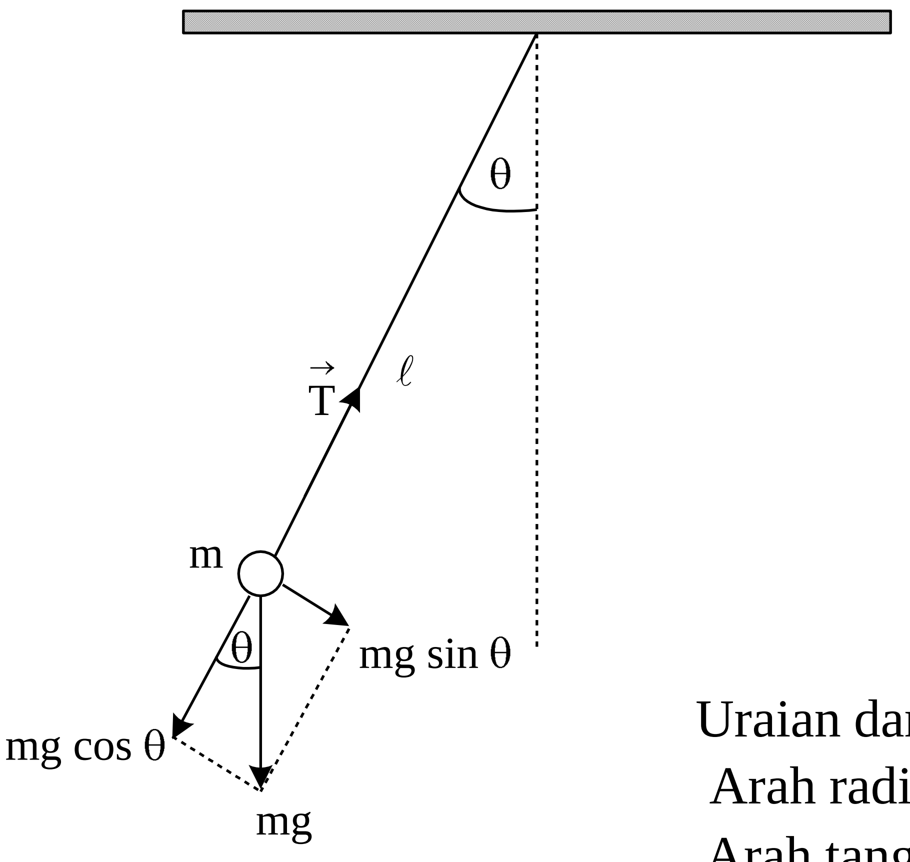
sehingga gaya tarik pada pegas adalah :

$F' = +6{,}16$ N (arah ke kanan)

AYUNAN SEDERHANA

Ayunan sederhana adalah sistem yang terdiri dari sebuah massa yang digantung dengan tali tanpa massa dan tidak dapat mulur.

Ayunan sederhana disebut juga gerak osilasi periodik.



Sebuah ayunan dengan panjang ℓ dengan sebuah benda bermassa m.

Berayun dalam bidang vertikal dengan pengaruh grafitasi, membentuk sudut θ terhadap arah vertikal

Gaya yang bekerja pada benda adalah gaya berat (mg) dan gaya tarik $\vec{T}$ dari tali.

Uraian dari gaya berat mg, yaitu terdiri dari :

Arah radial = mg cos θ

Arah tangensial = mg sin θ ⇒ (gerak lingkar)

Pada arah radial bekerja percepatan sentripental.

Arah tangensial adalah gaya pembalik pada benda m yang mengembalikan pada posisi setimbang.

Jadi gaya pembalik adalah : $F = - mg \sin\theta$

Jika sudut kecil, maka : $\sin\theta \approx \theta$

Simpangan lintasan : $x = \ell\,\theta$

Jika sudut kecil lintasan dapat dianggap garis lurus, maka persamaan menjadi :

$$F = - mg \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$= - mg\,\theta \quad \Rightarrow \quad x = \ell\,\theta \;\; ; \;\; \theta = \frac{x}{\ell}$$

$$= - mg\,\frac{x}{\ell}$$

$$= - \frac{mg}{\ell}\,x$$

Jika dilihat pada persamaan pegas : $F = -k \cdot x$, maka

$\frac{mg}{\ell}$ menggantikan tetapan k

Sehingga dipeoleh Perioda ayunan jika amplitudo kecil adalah :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

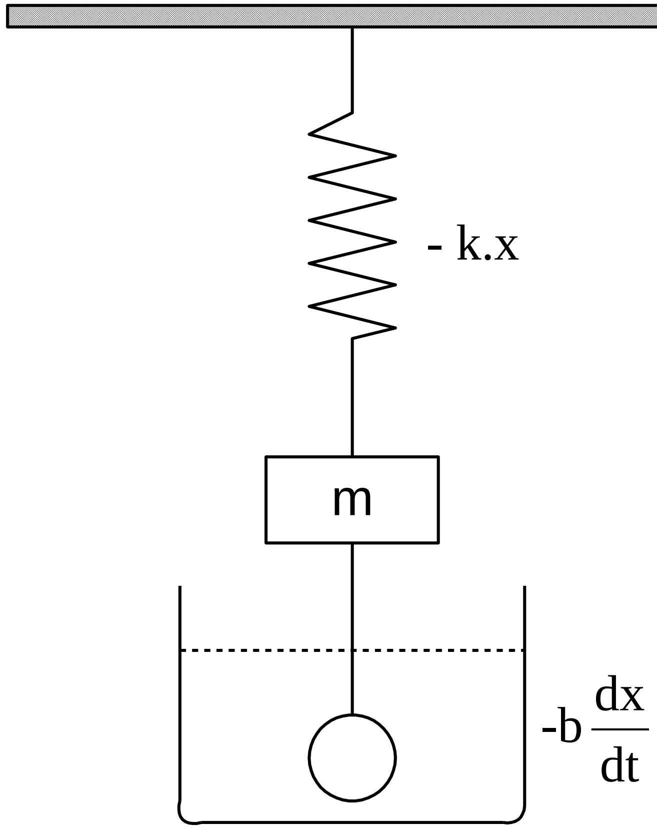
$$= 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/\ell}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

GERAK HARMONIK TEREDAM

Persamaan gerak teredam diperoleh dari Hukum Newton II, yaitu : F = m a

Dimana F = jumlah gaya balik -kx dan gaya redam $-b\dfrac{dx}{dt}$, b = tetapan positif



$$F = m\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-k.x - b\frac{dx}{dt} = m\,a$$

$$-k.x - b\frac{dx}{dt} = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k.x = 0$$

Sehingga diperoleh solusi persaman tersebut di atas adalah :

$$x = A\,e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \delta) \qquad \Rightarrow \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

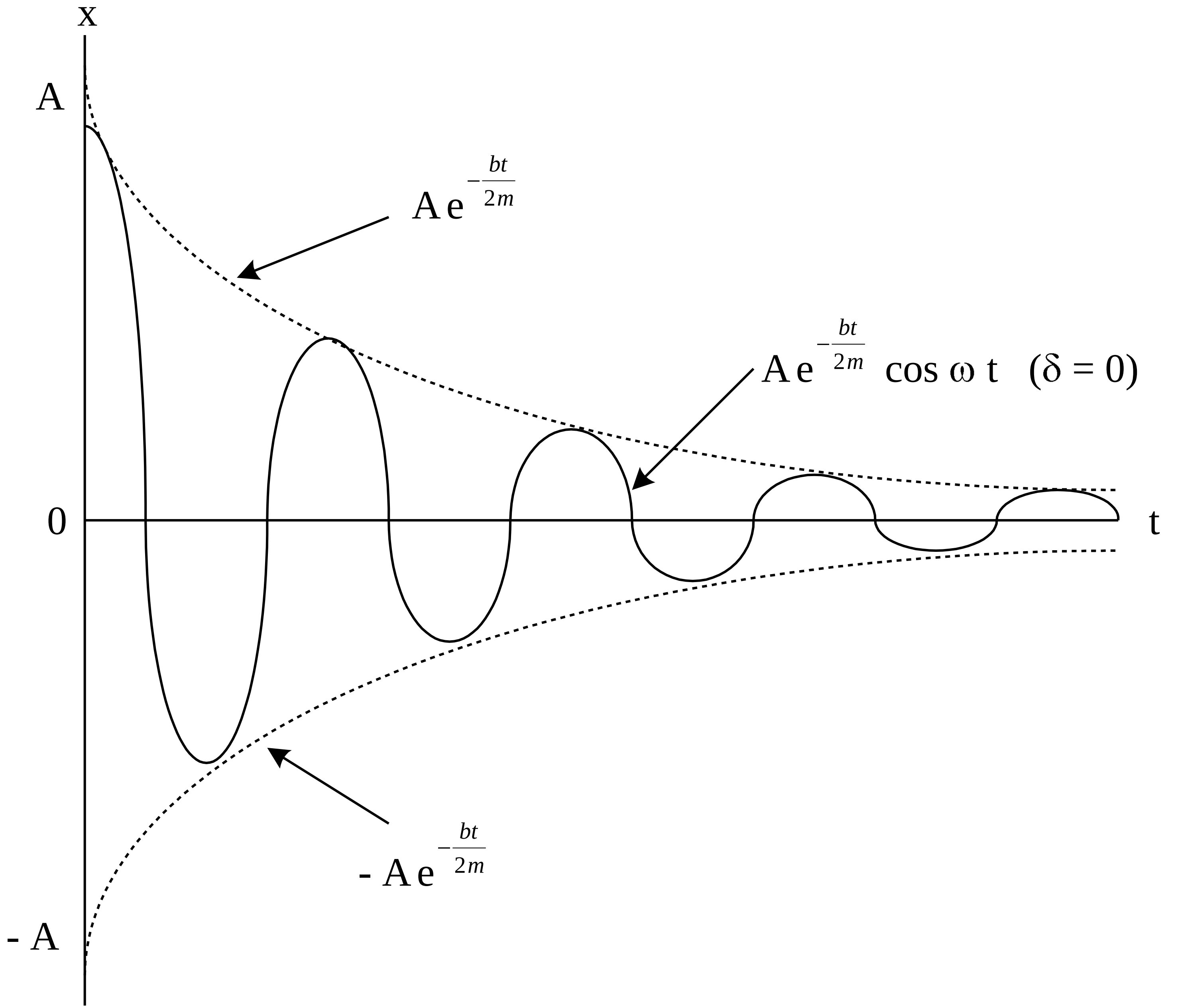
Persamaan solusi di atas dapat diartikan :

Frekuensi osilasi adalah lebih kecil, atau perioda osilasi lebih besar jika ada gesekan.

Jika tidak ada gesekan, maka $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ini merupakan frekuensi gerak harmonik tanpa redaman.

Amplitudo osilasi lama-kelamaan berkurang menjadi nol.


x
A
$Ae^{-\frac{bt}{2m}}$
$Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos\omega t \quad (\delta = 0)$
0
t
$-Ae^{-\frac{bt}{2m}}$
- A

Faktor amplitudo adalah fungsi eksponensial, yaitu

$$e^{-\frac{bt}{2m}}$$

artinya jika tidak ada gesekan atau nilai adalah b = 0
maka eksponensial = 1
dan amplitudo osilasi tidak teredam.